www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. Lyon - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1990

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Série M *Samedi 26 mai 1990 de 8 h à 12 h*

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Le texte est composé de trois parties largement indépendantes. Les questions sont numérotées de 1 à 20, sans renumération par parties.

Notations et conventions utilisées

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\sigma(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{N}il_n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \exists\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ N^p = 0\}.$$

K[X] désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans un corps K. Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on confond un polynôme à coefficients dans K et sa fonction polynôme associée de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Un élément P de K[X] est dit unitaire de degré n si $P = X^n + Q$ où degré $Q \leqslant n - 1$. On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \text{degré } P \leqslant n\}$.

I

1°) Soient A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda B)$; établir que φ est un polynôme en λ et majorer son degré à l'aide de n ; trouver une autre expression de $\varphi(\lambda)$ lorsque $B \in GL_n(\mathbb{R})$ (groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$),et énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit de degré n.

On pose, pour A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(A,B)\ \lambda^k$.

2°) Calculer $\varphi_0(A,B)$ et $\varphi_n(A,B)$.
A l'aide de $\varphi'(\lambda)$ calculer $\varphi_1(A,B)$.

3°) Etablir que, pour $|\varepsilon| > 0$, assez petit, les matrices $B_\varepsilon = B + \varepsilon I_n$ sont inversibles (I_n étant la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

4°) On note $Z(\varphi)$ l'ensemble des racines de $\varphi(\lambda)$.
On suppose ${}^tA = A$, ${}^tB = B$, $AB = BA$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B dans $GL_n(\mathbb{R})$.
Etablir que $Z(\varphi) \subset \mathbb{R}$.

5°) i) On choisit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donner un exemple de matrice A symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Z(\varphi) \not\subset \mathbb{R}$.

ii) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tB = B$ et $\sigma(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.
Montrer qu'il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$, C symétrique, vérifiant : $C^2 = B$ et $\sigma(C) \subset \mathbb{R}_+^*$.

iii) On choisit B vérifiant les hypothèses de 5°) ii) et A symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors de $Z(\varphi) \subset \mathbb{R}$.

6°) i) Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que ${}^tC = -C$ et $C \neq 0$. Montrer que $\sigma(C) \subset i\mathbb{R}$.

ii) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$ et $B \in GL_3(\mathbb{R})$, ${}^tB = B$ et $AB = BA$. Montrer que $Z(\varphi) \subset i\mathbb{R}$.

7°) i) Si $N \in \mathcal{N}il_n(\mathbb{R})$, établir que $\sigma(N) = \{0\}$.
En déduire la valeur de $\det(I_n + N)$.

ii) Soit $B \in \mathcal{N}il_n(\mathbb{R})$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $AB = BA$.
Calculer $\varphi(\lambda)$ en fonction de det A ; que dire de $Z(\varphi)$?

iii) Soit $B \in \mathcal{N}il_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA$. A l'aide de I.3°), calculer $\varphi(\lambda)$ en fonction de det A ; que dire de $Z(\varphi)$?

8°) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $Z(\varphi)$ possède un unique élément.

II

Dans cette partie $n = 2$, $\lambda = x + iy$, $M(x,y)$ désigne le point de coordonnées réelles x et y d'un plan affine euclidien $\mathcal{A}_2$.
On a toujours $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda B)$.

9°) Déterminer le lieu géométrique des points M de $\mathcal{A}_2$ vérifiant pour A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la relation $\mathrm{Im}(\varphi(\lambda)) = 0$.
(Im(z) désignant la partie imaginaire du complexe z).
Discuter brièvement suivant A et B.

10°) Déterminer le lieu géométrique des points M de $\mathcal{A}_2$ vérifiant pour A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la relation $\mathfrak{Re}(\varphi(\lambda)) = 0$.
($\mathfrak{Re}(z)$ désignant la partie réelle du nombre complexe z).

11°) Déterminer le lieu géométrique des points M de $\mathcal{A}_2$ vérifiant pour A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la relation $\mathrm{Re}(\varphi(\lambda)) = \mathrm{Im}(\varphi(\lambda))$.
Discuter brièvement suivant A et B ; donner les noms usuels des lieux géométriques obtenus.

III

Soient un entier m supérieur ou égal à 2 et A et B les deux endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$(AP)(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{k=m-1} P\left(X + \frac{k}{m}\right) \quad \text{et} \quad (BP)(X) = P(mX).$$

On s'intéresse à l'équation en $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ (*) : $(A - \lambda B)(P) = 0$.

12°) Que vaut λ s'il existe un polynôme P unitaire de degré n vérifiant (*) ?
Désormais λ possède cette valeur.

13°) i) On observe que A et B laissent stable $\mathbb{R}_n[X]$ et on note $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les matrices des restrictions de A et B à $\mathbb{R}_n[X]$ relativement à la base canonique de cet espace.
Calculer $\varphi(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{B})$.

ii) En déduire qu'il existe un unique polynôme B_n unitaire de degré n vérifiant (*).

14°) Comparer $B_n'(x)$ (dérivée de B_n en x) et $B_{n-1}(x)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

15°) i) Montrer que $B_n(1) = B_n(0)$ si $n \geqslant 2$.
(Utiliser (*) avec deux valeurs particulières de x).

ii) Etablir, par récurrence sur n, que $B_n(x+1) - B_n(x) = n\,x^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$
et en déduire une expression de $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

iii) Déterminer $B_2(x)$, $B_3(x)$ et leurs zéros.

iv) Trouver une relation simple entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$.

v) Déterminer les couples $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ vérifiant : $\forall n \geqslant 1$, $S_p(n) = [S_1(n)]^q$.

16°) Pour toute fonction f de période $T > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note :
$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}u}\,du$, le n-ième coefficient de Fourier complexe de f.
Soit $\phi_1(x) = x - \frac{1}{2}$ si $x \in]0,1[$.
Comment définir ϕ_1 en 0 et en 1 pour pouvoir la prolonger en une fonction 1-périodique développable en série de Fourier ?
Donner alors son développement.

17°) Pour $n \geqslant 3$, établir que ϕ_n, définie par : $x \mapsto \frac{-n!}{(2i\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{e^{2i\pi kx}}{k^n}$, est une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

18°) On admet que $\phi_2'(x) = 2\,\phi_1(x)$ sur $]0,1[$. Si $n \geqslant 2$, montrer que ϕ_n restreinte à $[0,1]$ est un polynôme unitaire de degré n.

19°) Si $n \geqslant 2$, montrer que $\phi_n(x) = B_n(x)$ sur $[0,1]$.

20°) En prouvant que $B_n \in \mathbb{Q}[X]$, établir que, pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$\pi^{-2p}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2p}} \text{ est rationnel.}$$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail